第22講　微分方程式

22

［A］ 次の各問いに答えよ．

(1) $y'-xy=x$ を満たす関数を求めよ．ただし $x=0$ のとき $y=0$ であるとする．

(2) $y'+3x^2y=3x^5$ を満たす関数を求めよ．ただし $x=0$ のとき $y=0$ であるとする．

(3) 室温が摂氏 T_0 度の部屋にビーカーがおかれていて，そのビーカーの中にある液体が入っている．時刻 t におけるその液体の温度が摂氏 T 度であり，$t=0$ のとき $T=2T_0$ であった．温度 T の時間変化，つまり $\dfrac{dT}{dt}$ は，液体の温度 T と室温 T_0 との差に比例しているとして，その比例定数を $-k$ としたとき，T を t の式で表せ．ただし，部屋は十分に大きく，室温は常に一定であるものとする．

［B］ 関数 $f(x)$ は微分可能で $f'(x)$ は連続とし，$f(x)$ は関係式

$$f(x)+\int_0^x f(t)dt=\sin x$$

を満たしているとする．次の問いに答えよ．

(1) $f(x)$ と $f'(x)$ との間に成り立つ関係式を求めよ．

(2) $\dfrac{d}{dx}\{e^x f(x)\}$ を指数関数と三角関数で表せ．

(3) $\displaystyle\int_0^x e^t(\sin t+\cos t)dt=\int_0^x e^t(\sin t-\cos t)dt+e^x(\sin x+\cos x)-1$ を示せ．

(4) $\displaystyle\int_0^x e^t\cos t\,dt$ を求めよ．

(5) $f(x)$ を求めよ．

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

＜ Note ＞

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第22講　微分方程式

22　$f(x)$ は開区間 $(0,\ 1)$ で定義された関数で，この区間で $f(x)>0$，$f'(x)<0$，$f''(x)\neq 0$ を満たすとする．このとき，曲線 $y=f(x)$ 上の任意の点 $\mathrm{P}(x,\ y)$ における接線が x 軸，y 軸と交わる点をそれぞれ A，B，座標の原点を O とすると，OA＋OB はつねに一定になるという．

(1)　OA＋OB を $F(x)$ とするとき，$F(x)=c$（c は定数）の両辺を x で微分することにより，微分方程式 $\dfrac{dy}{dx}=-\sqrt{\dfrac{y}{x}}$ が得られることを示せ．

(2)　(1)の微分方程式の解の中で，$x=\dfrac{1}{4}$ のとき $y=\dfrac{1}{4}$ となるものを求めよ．

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

＜ Note ＞

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第22講　微分方程式

22

［A］　次の各問いに答えよ．

(1)　$y'-xy=x$ を満たす関数を求めよ．ただし $x=0$ のとき $y=0$ であるとする．

(2)　$y'+3x^2y=3x^5$ を満たす関数を求めよ．ただし $x=0$ のとき $y=0$ であるとする．

(3)　室温が摂氏 T_0 度の部屋にビーカーがおかれていて，そのビーカーの中にある液体が入っている．時刻 t におけるその液体の温度が摂氏 T 度であり，$t=0$ のとき $T=2T_0$ であった．温度 T の時間変化，つまり $\dfrac{dT}{dt}$ は，液体の温度 T と室温 T_0 との差に比例しているとして，その比例定数を $-k$ としたとき，T を t の式で表せ．ただし，部屋は十分に大きく，室温は常に一定であるものとする．

［B］　関数 $f(x)$ は微分可能で $f'(x)$ は連続とし，$f(x)$ は関係式

$$f(x)+\int_0^x f(t)dt=\sin x$$

を満たしているとする．次の問いに答えよ．

(1)　$f(x)$ と $f'(x)$ との間に成り立つ関係式を求めよ．

(2)　$\dfrac{d}{dx}\{e^x f(x)\}$ を指数関数と三角関数で表せ．

(3)　$\displaystyle\int_0^x e^t(\sin t+\cos t)dt=\int_0^x e^t(\sin t-\cos t)dt+e^x(\sin x+\cos x)-1$ を示せ．

(4)　$\displaystyle\int_0^x e^t\cos t\,dt$ を求めよ．

(5)　$f(x)$ を求めよ．

【答】　［A］(1) $y=e^{\frac{x^2}{2}}-1$　(2) $y=e^{-x^3}+x^3-1$　(3) $T=T_0(1+e^{-kt})$

［B］(1) $f'(x)+f(x)=\cos x$　(2) $e^x\cos x$　(3) 略　(4) $\dfrac{1}{2}\{e^x(\sin x+\cos x)-1\}$

(5) $f(x)=\dfrac{1}{2}(\sin x+\cos x-e^{-x})$

【解説】

［A］(1) 与式は $\dfrac{dy}{dx}=x(y+1)$ つまり $y+1\neq0$ より $\dfrac{1}{y+1}dy=x\,dx$ とできるので，積分定数を C とすると

$$\log|y+1|=\frac{x^2}{2}+C \qquad \therefore\quad y+1=\pm e^{\frac{x^2}{2}+C}$$

を得る．このとき $\pm e^C$ を定数 D で置き換えると $y=De^{\frac{x^2}{2}}-1$ と表せる．

ここで，$x=0$ のとき $y=0$ なので $0=De^0-1$ より $D=1$

よって $\boldsymbol{y=e^{\frac{x^2}{2}}-1}$

(2)　与式は $e^{x^3}y'+3x^2e^{x^3}y=3x^5e^{x^3}$ つまり $(e^{x^3}y)'=3x^5e^{x^3}$ とできる．

ここで

$$\{(x^3-1)e^{x^3}\}'=3x^2e^{x^3}+(x^3-1)\cdot3x^2e^{x^3}=3x^5e^{x^3}$$

©RECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

なので積分定数 C を用いて

$$e^{x^3}y=(x^3-1)e^{x^3}+C \qquad \therefore \quad y=x^3-1+Ce^{-x^3}$$

ここで，$x=0$ のとき $y=0$ なので $0=0-1+C$ より $C=1$.

よって $\boldsymbol{y=e^{-x^3}+x^3-1}$

(3)　題意より $\dfrac{dT}{dt}=-k(T-T_0)$ が成り立つ.

このとき $T\neq T_0$ より $\dfrac{1}{T-T_0}dT=-k\,dt$ とできるので，積分定数 C を用いて

$$\log|T-T_0|=-kt+C \qquad \therefore \quad |T-T_0|=e^{-kt+C}$$

となる．ここで，$\pm e^C=D$ とおくと，この式は $T=T_0+De^{-kt}$ となるが，$t=0$ のとき $T=2T_0$ より $2T_0=T_0+D$ つまり $D=T_0$ となるので，$\boldsymbol{T=T_0(1+e^{-kt})}$

［B］ (1)　与式両辺を x で微分すると

$$\boldsymbol{f'(x)+f(x)=\cos x}$$

(2)

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\{e^xf(x)\}&=e^xf(x)+e^xf'(x)\\&=e^x\{f'(x)+f(x)\}\\&=\boldsymbol{e^x\cos x}\quad ((1)\text{より})\end{aligned}$$

(3)

$$\begin{aligned}&\int_0^x e^t(\sin t+\cos t)dt\\&=\Big[e^t(\sin t+\cos t)\Big]_0^x-\int_0^x e^t(\cos t-\sin t)dt\\&=e^x(\sin x+\cos x)-1+\int_0^x e^t(\sin t-\cos t)dt\end{aligned}$$

(4)　(3)より

$$\begin{aligned}&\int_0^x e^t(\sin t+\cos t)dt-\int_0^x e^t(\sin t-\cos t)dt\\&=e^x(\sin x+\cos x)-1\\&\therefore\quad \int_0^x e^t\cos t\,dt=\frac{e^x}{2}(\sin x+\cos x)-\frac{1}{2}=\boldsymbol{\frac{1}{2}\{e^x(\sin x+\cos x)-1\}}\end{aligned}$$

(5)　(2)(4)より

$$\int_0^x\{e^tf(t)\}'dt=\int_0^x e^t\cos t\,dt$$

$$\iff\quad e^xf(x)-e^0f(0)=\frac{e^x}{2}(\sin x+\cos x)-\frac{1}{2}$$

ここで与式両辺に $x=0$ を代入すると

$$f(0)+0=\sin 0 \qquad \therefore\quad f(0)=0$$

よって

$$f(x)=\frac{1}{2}(\sin x+\cos x)-\frac{1}{2}e^{-x}=\boldsymbol{\frac{1}{2}(\sin x+\cos x-e^{-x})}$$

©RECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第22講　微分方程式

22　$f(x)$ は開区間 $(0,\ 1)$ で定義された関数で，この区間で $f(x)>0$，$f'(x)<0$，$f''(x)\neq 0$ を満たすとする．このとき，曲線 $y=f(x)$ 上の任意の点 $\mathrm{P}(x,\ y)$ における接線が x 軸，y 軸と交わる点をそれぞれ A，B，座標の原点を O とすると，OA＋OB はつねに一定になるという．

(1)　OA＋OB を $F(x)$ とするとき，$F(x)=c$（c は定数）の両辺を x で微分することにより，微分方程式 $\dfrac{dy}{dx}=-\sqrt{\dfrac{y}{x}}$ が得られることを示せ．

(2)　(1)の微分方程式の解の中で，$x=\dfrac{1}{4}$ のとき $y=\dfrac{1}{4}$ となるものを求めよ．

【答】　(1) 略　(2) $\sqrt{x}+\sqrt{y}=1$

【解説】

(1)　$\mathrm{P}(x,\ y)$ における接線の方程式は

$$Y=f'(x)(X-x)+f(x)$$

より $\mathrm{A}\left(x-\dfrac{f(x)}{f'(x)},\ 0\right)$，$\mathrm{B}(0,\ f(x)-xf'(x))$ となるので

$$\begin{aligned}F(x)&=\left\{x-\frac{f(x)}{f'(x)}\right\}+\{f(x)-xf'(x)\}\\&=\left\{1-\frac{1}{f'(x)}\right\}\{f(x)-xf'(x)\}\end{aligned}$$

であるから

$$\begin{aligned}F'(x)&=\frac{f''(x)}{\{f'(x)\}^2}\{f(x)-xf'(x)\}+\left\{1-\frac{1}{f'(x)}\right\}\{-xf''(x)\}\\&=\frac{f''(x)}{\{f'(x)\}^2}\Big[\{f(x)-xf'(x)\}+[\{f'(x)\}^2-f'(x)](-x)\Big]\\&=\frac{f''(x)}{\{f'(x)\}^2}[f(x)-x\{f'(x)\}^2]=0\end{aligned}$$

ここで $f(x)=y$，$f'(x)=\dfrac{dy}{dx}$ とおくと

$$y-x\left(\frac{dy}{dx}\right)^2=0 \iff \left(\frac{dy}{dx}\right)^2=\frac{y}{x}$$

$\dfrac{dy}{dx}<0$ より

$$\frac{dy}{dx}=-\sqrt{\frac{y}{x}}$$

(2)

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{y^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{1}{2}}} \iff y^{-\frac{1}{2}}dy=-x^{-\frac{1}{2}}dx$$

よって積分定数 C を用いると

$$2y^{\frac{1}{2}}=-2x^{\frac{1}{2}}+C \qquad \therefore\ \sqrt{x}+\sqrt{y}=\frac{1}{2}C$$

©RECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

$x=y=\dfrac{1}{4}$ より

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=\frac{1}{2}C \qquad \therefore \quad C=2$$

ゆえに

$$\boldsymbol{\sqrt{x}+\sqrt{y}=1}$$

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。